Расчетно-графическое задание №2
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

Задание

Решите на отрезке $\left[a,b\right]$ задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f\left(x, y\right)$$

с начальным условием

$$y\left(a\right) = y_a$$

1. простейшим методом Эйлера;
2. модифицированным методом Эйлера.

Получите точное аналитическое решение. Постройте графики трех решений, выведите результаты в таблицу (координата узла x_i, значения решений в узле y_i, полученных разными методами). Сделайте вывод о точности решения, получаемого простейшим и модифицированным методами Эйлера для одинакового шага *h* по оси *x*.

Возьмите другое значение шага *h* и повторите действия. Сделайте вывод о влиянии величины шага на точность решения.

На отрезке $\left[a,b\right]$ выделите участки, где графики решений совпадают и участки, где графики расходятся на максимальное расстояние, сделайте вывод.

Схема решения

В процессе численного решения задачи Коши отрезок $\left[a,b\right]$ разбивают на *n* равных частей, получая $n+1$ узлов $x_i = a + ih,\ i = \overline{0,n},\ x_0 = a,\ x_n = b,\ h = \left(b-a\right)/n$.

Значение решения в узле $x_0 = a$ известно из начального условия: $y_0 = y_a$.

Значения $y_i,\ i = \overline{1,n}$ в остальных узлах определяются последовательно.

При решении задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка простейшим методом Эйлера значения функции в узлах находят по формуле

$$\begin{aligned} &y_0 = y_a, \\ &y_{j+1} = y_j + hf\left(x_j, y_j\right),\ j = 0,1,\ldots,n-1. \end{aligned}$$

При решении модифицированным методом Эйлера используют формулу

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\Big[f\left(x_j, y_j\right) + f\Big(x_j + h, y_j + hf\left(x_j, y_j\right)\Big)\Big],\ j = 0,1,\ldots,n-1.$$

Варианты заданий

Дифференциальное уравнение и начальное условие определяются по вариантам. Правую границу отрезка $[a,b]$ выберите самостоятельно.

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2,\ y(1) = 0$.
2. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ y(0) = 0$.
4. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.
5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ y(-1) = \frac{3}{2}$.
6. $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1),\ y(0) = 1$.
7. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.
9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2,\ y(1) = 1$.
10. $y' + \frac{2xy}{x^2+1} = \frac{2x^2}{x^2+1},\ y(0) = \frac{2}{3}$.
11. $y' + \frac{(2x-5)y}{x^2} = 5,\ y(2) = 4$.
12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x,\ y(1) = e$.
13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x},\ y(1) = 1$.
14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3},\ y(1) = 4$.
15. $y' + \frac{2y}{x} = x^3,\ y(1) = -\frac{5}{6}$.
16. $y' + \frac{y}{x} = 3x,\ y(1) = 1$.

17. $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2,\ y(1) = 3.$

18. $y' + \frac{(1-2x)y}{x^2} = 1,\ y(1) = 1.$

19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3},\ y(1) = 1.$

20. $y' + 2xy = -2x^3,\ y(1) = \frac{1}{e}.$

21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2},\ y(2) = 1.$

22. $y' + xy = -x^3,\ y(0) = 3.$

23. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2 e^x,\ y(0) = 1.$

24. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x,\ y(0) = 1.$

25. $y' + \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3,\ y(0) = \frac{1}{2}.$

26. $y' - y\cos x = -\sin 2x,\ y(0) = 3.$

27. $y' - 4xy = -4x^3,\ y(0) = -\frac{1}{2}.$

28. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x},\ y(1) = 1.$

29. $y' - 3x^2 y = x^2 \frac{1+x^3}{3},\ y(0) = 0.$

30. $y' - y\cos x = \sin 2x,\ y(0) = -1.$